Den Abstand $\mathrm{d}(P,E)$ eines Punktes $P\,(\,p_1\,|\,p_2\,|\,p_3\,)$ von einer Ebene

$$E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

kann man über die sogenannte HESSESCHE *Normalenform* berechnen:

$$\mathrm{d}(P,E) = \left|\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 - d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

Daneben gibt es noch folgende HESSESCHE Normalenform, was auch den Namen *Normalenform* rechtfertigt:

Den Abstand $\mathrm{d}(P,E)$ eines Punktes $P\,(\,p_1\,|\,p_2\,|\,p_3\,)$ zu einer Ebene in Normalenform

$$E : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

kann man über die zweite HESSESCHE *Normalenform* berechnen:

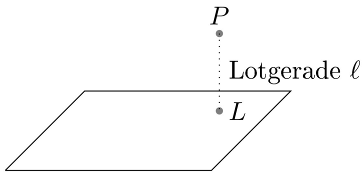
$$\mathrm{d}(P,E) = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Ü 51. Berechnen Sie den Abstand des Punktes P zur Ebene E.

1. $E : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9$ und $P(3|3|1,5)$.
2. $E : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 16$ und $P(12|-4|2)$.
3. $E : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$ und $P(1|2|-3)$.
4. $E : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ und $P(21|-19|-10)$.
5. $E : 4x_1 + 3x_2 = 7$ und $P(5|4|77)$.
6. $E : -3x_1 + 4x_3 = 10$ und $P(-2|1|0)$.
7. $E : 3x_1 + 4x_3 = 4$ und $P(1,5|2,7|3)$.
8. $E : x_1 + 5x_2 - x_3 = -4$ und $P(4|4|1)$.
9. $E : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$ und $P(4|4|0)$.
10. $E : x_1 = 2,17$ und $P(22,17|7,26|4,315)$.

5.2.2 Mit Hilfe der Lotgerade

Man kann auch eine Lotgerade verwenden, um den Abstand zwischen einem Punkt P und einer Ebene E zu bestimmen. Dieses Verfahren ist zwar aufwändiger als das Benutzen der HESSESCHEN Normalenform, ermöglicht es jedoch, den Punkt L auf E zu bestimmen, der von P den geringsten Abstand besitzt. Dieses Verfahren benötigt man auch, um P an der Ebene E zu spiegeln.



Wir bestimmen den Abstand zwischen dem Punkt $P(6\,|\,4\,|-2)$ und der Ebene $E: x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$.

α) Dazu stellen wir zunächst eine Lotgerade von P auf die Ebene auf, also eine Gerade, die durch P geht und senkrecht zu E verläuft. Da sie durch P geht, können wir diesen Punkt als Stützpunkt nehmen. Da die Lotgerade senkrecht auf E steht, verwenden wir den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor. Es ergibt sich also als Lotgerade:

$$\ell: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

β) Wir setzen den Laufpunkt von ℓ in E ein, um den Parameter t für den Schnittpunkt von ℓ und E zu bestimmen: $L_t(6+t|4+2t|-2-t)$ in E einsetzen:

$$\begin{aligned} 6 + t + 2(4+2t) - (-2-t) &= 4 \\ 6 + t + 8 + 4t + 2 + t &= 4 \\ 16 + 6t &= 4 && |-16 \\ 6t &= -12 && |:6t \qquad = -2. \end{aligned}$$

γ) Wir setzen $t = -2$ in den Laufpunkt ein und erhalten den Schnittpunkt

$L(4|0|0)$. Es ist der *Lotfußpunkt*, also der Punkt auf E mit geringstem Abstand zu P.

δ) Wir bestimmen noch den Abstand von L zu P über den Betrag des Vektors $\overrightarrow{LP}$:

$$\|\overrightarrow{LP}\| = \left\|\begin{pmatrix} 6-4 \\ 4-0 \\ -2-0 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|$$

$$= \sqrt{2^2+4^2+2^2} = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} \approx 5.$$

Der Abstand beträgt also ca. 5 Längeneinheiten.

5.3 Der Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade

Alle Punkte auf der Geraden haben den selben Abstand zur Ebene. Deshalb nimmt man einen beliebigen Punkt der Geraden (man kann immer direkt den Stützpunkt verwenden) und bestimmt dessen Abstand zur Ebene (z. B. mit der HESSESCHEN Normalenform).

Ü 52. Bestimmen Sie den Abstand zwischen Ebene und paralleler Gerade.

1. $E: 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$ und $g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $E: 4x_1 - 3x_2 = 6$ und $h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

5.4 Der Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen

Man nimmt einen beliebigen Punkt der einen Ebene (z. B. einen Spurpunkt) und bestimmt dessen Abstand zur anderen Ebene.

Ü 53. Bestimmen Sie den Abstand der prallelen Ebenen.

1. $E: x_1 + x_2 + 6x_3 = 4$ und $F: x_1 + x_2 + 6x_3 = 80$.
2. $E: x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ und $F: x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 63$.

5.5 Der Abstand zwischen Punkt und Gerade

5.5.1 Das GROSSMANN-ZWICKEL-Verfahren

Dieses wohl schnellste Verfahren zur Bestimmung des Abstandes eines Punktes P zu einer Geraden g soll anhand eines Beispieles erklärt werden. Es basiert auf einer Idee des Schülers SIMON ZWICKEL.

Wir bestimmen den Abstand des Punktes $P\,(\,3\,|\,3\,|\,9\,)$ von der Geraden

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

α) Wir berechnen zunächst den Vektor $\overrightarrow{SP}$, wobei S der Stützpunkt der Geraden ist.

$$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

β) Nun lösen wir die GROSSMANN-ZWICKEL-Gleichung:

$$\overrightarrow{SP} \bullet \overrightarrow{r} = t \cdot (\overrightarrow{r} \bullet \overrightarrow{r}),$$

wobei $\overrightarrow{r}$ der Richtungsvektor der Geraden g ist, also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} &= t \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 &= t \cdot (0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4) \\ 17 &= t \cdot 17 \qquad | : 17 \\ t &= 1. \end{aligned}$$

γ) Wir setzen t in g ein und erhalten den Punkt L auf der Geraden, der zu P den minimalen Abstand hat. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, also $L(1|3|9)$.

$\delta)$ Der Abstand von g zu P ist der Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PL}$

$$d(g,P) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2$$

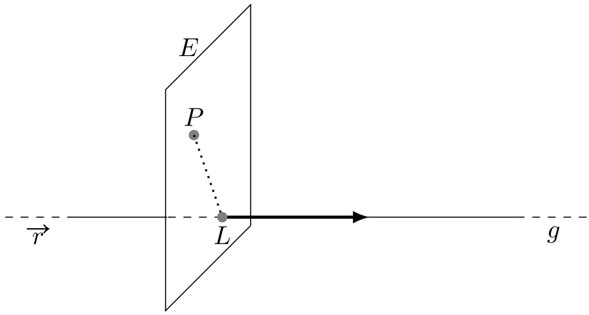
Grossmann-Zwickel-Verfahren: Den Abstand eines Punktes P von der Geraden g mit Stützpunkt S und Richtungsvektor $\overrightarrow{r}$ berchnet man nach der Merkregel „Sport-Rohr“ durch die folgende Gleichung:

$$SPortro(h)r$$
$$\overrightarrow{SP} \bullet \overrightarrow{r} = t \cdot \overrightarrow{r} \bullet \overrightarrow{r}$$

Die Gleichung bestimmt den Parameter t so, dass man beim Einsetzen in g den Lotfußpunkt L erhält. Der gesuchte Abstand ist $\mathrm{d}(P,g) = \left\| \overrightarrow{PL} \right\|$.

5.5.2 Mit Hilfe einer orthogonalen Ebene

Wenn man den Abstand zwischen einem Punkt P und einer Geraden g sucht, so sucht man einen Punkt L auf der Geraden, der den kleinsten Abstand zu P besitzt. Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PL}$ ist dann senkrecht auf dem Richtungsvektor von g. Wie man L auffinden kann, machen wir uns an einem kleinen Gedankenexperiment klar. Die Gerade stellen wir uns als eine straff gespannte unendlich lange Wäscheleine vor. In der Nähe unserer Wäscheleine befindet sich ein Tennisball, dieser ist unserer Punkt P. Gesucht ist der kleinste Abstand des Tennisballs zur Wäscheleine. Wir nehmen nun einen Reißnagel. Den Kopf des Reißnagels kann man sich nach allen Richtungen vergrößert denken, so dass eine Ebene entsteht. Die Spitze des Reißnagels bildet entsprechend den Normalenvektor unserer Ebene. Nun denken wir uns den Reißnagel so, dass seine Spitze parallel zur Wäscheleine verläuft und verschieben ihn in Richtung seiner Spitze, also parallel zur Wäscheleine.



Den Reißnagel kann man jetzt so lange verschieben, bis sein vergrößerter Kopf den Tennisball trifft. Die Ebene, d. h. der Kopf des Reißnagels verbindet jetzt den Tennisball orthogonal mit der Wäscheleine. Dort, wo die Ebene die Wäscheleine schneidet, liegt also der gesuchte Punkt L.

Um den Abstand eines Punktes P von einer Geraden $g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{s} + t \cdot \overrightarrow{r}$ zu bestimmen, kann man wie folgt vorgehen:

- Man stellt zuerst die Ebene E mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{r}$ und dem Punkt P auf.
- Dann berechnet man den Schnittpunkt L von E und g.
- Schließlich berechnet man den Abstand $\overline{PL}$.

Wir bestimmen den Abstand des Punktes $P\,(\,3\,|\,3\,|\,9\,)$ von der Geraden

$$g : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

α) Wir stellen die Gleichung der Hilfsebene mit dem Richtungsvektor als Normalenvektor auf:

$$E : x_2 + 4x_3 = d.$$

β) Wir setzen den Punkt P ein, um d zu bestimmen.

$$3 + 4 \cdot 9 = 39.$$

Damit gilt:

$$E : x_2 + 4x_3 = 39.$$